

Precision and Efficiency of the Method of Moments Applied to the Functional Functions with Fold Points

Qingqiu Zhou^{*}, Junjie Wang

College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai, China

Email address:

2032530@tongji.edu.cn (Qingqiu Zhou), jjwang@tongji.edu.cn (Junjie Wang)

^{*}Corresponding author

To cite this article:

Qingqiu Zhou, Junjie Wang. Precision and Efficiency of the Method of Moments Applied to the Functional Functions with Fold Points. *Science Discovery*. Vol. 10, No. 5, 2022, pp. 279-285. doi: 10.11648/j.sd.20221005.11

Received: August 7, 2022; **Accepted:** September 1, 2022; **Published:** September 5, 2022

Abstract: In the reliability theory, the moment method proposed by Zhao obtains the first fourth order moments of the structural function by the point estimation method based on Gauss-Emhart integral, assuming that the functional function satisfies a specific distribution or the approximate probability distribution function of the functional function is obtained by the Pearson system, so as to solve the reliability index and failure probability of the structure. For the elastic phase, the structural function is a smooth curve, and a large number of cases have proved that only 5-point estimation or 7-point estimation is required, and the moment method can achieve high accuracy, and the accuracy increases monotonically with the increase of the estimated number of points. In the case of structural elasto-plastic analysis, such as bridge ship impact analysis and structural static elasto-plastic analysis, the functional function will have folded points, and the accuracy and efficiency of the method of moments need to be studied. Comparing the calculation results of the method of moments and Monte-Carlo simulation, the accuracy of the method of moments does not increase monotonically with the increase of the estimated number of points in the case of the functional function with fold points, and when the number of estimated points is sufficient, generally 15-23, the calculation results of the method of moments are basically stable and have good accuracy. Under the same accuracy requirement, the calculation volume of the method of moments increases when the function function has fold points compared with the smooth function case, but the Monte-Carlo simulation still has higher calculation efficiency compared with the smooth function case.

Keywords: Method of Moments, Polygonal Line Force - Displacement Curve, Calculation Efficiency

功能函数有折点情况下矩法的精度与效率

周庆秋^{*}, 王君杰

同济大学土木工程学院, 上海, 中国

邮箱

2032530@tongji.edu.cn (周庆秋), jjwang@tongji.edu.cn (王君杰)

摘要: 可靠度理论中, 赵衍刚提出的矩法通过基于高斯-埃米尔特积分的点估计方法得到结构功能函数的前四阶矩, 假定功能函数满足某种特定分布或通过Pearson系统得到功能函数的近似概率分布函数, 以此求解结构的可靠指标和失效概率。对于弹性阶段, 结构功能函数为光滑曲线, 大量算例已证明只需进行5点估计或7点估计, 矩法可达到较高精度, 且精度随着估计点数的增加单调增加。在结构弹塑性分析时, 如桥梁船舶撞击分析、结构静力弹塑性分析等, 功能函数会出现有折点情况, 此时矩法的计算精度和效率尚需研究。比较矩法和Monte-Carlo模拟的计算结果, 在功能函数有折点情况下, 矩法精度并非随估计点数增加而单调增加, 当估计点个数足够多时, 一般为15~23个, 矩法计算结果基

本稳定, 且有较好的精度。在同等精度要求下, 功能函数有折点情况时矩法计算量与功能函数光滑情况时相比有所增加, 但Monte-Carlo模拟相比, 仍有较高的计算效率。

关键词: 矩法, 多折线力-位移关系, 计算效率

1. 引言

结构可靠度理论中一个基本的问题是求解结构的失效概率[1]:

$$P_f = \text{Prob}[G(\mathbf{X}) \leq 0] = \int_{G(\mathbf{x}) \leq 0} f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^T$ 表示结构体系中不确定因素的基本随机变量列向量, $f(\mathbf{X})$ 为 \mathbf{X} 的联合概率分布密度函数, $G(\mathbf{X})$ 为结构功能函数, P_f 为结构失效概率。

由于 $f(\mathbf{X})$ 通常比较复杂, 无法直接通过积分计算结构失效概率, 因此出现了一系列简化计算方法。传统的一次二阶矩(FORM)[1, 2]、二次二阶矩(SORM)[3-5]、一次三阶矩(FOTM)[10]等方法需要将结构功能函数求导进行泰勒级数展开, 并通过迭代的方法求解设计验算点, 很多学者已经指出其精度不高的缺点[6, 7]。Monte-Carlo模拟以及一系列改进的Monte-Carlo模拟方法被认为随着计算样本数量的增加, 计算结果可以达到很高的精度, 但对计算量要求很高, 对于失效概率为 P_f , Monte-Carlo模拟计算量至少为 $100/P_f$ 次[6, 7]。

Zhao和他的合作者开发了各种矩方法, 以避免使用随机变量的概率密度函数[8, 9, 14]。Zhao提出的矩法, 通过基于高斯-埃米尔特积分的点估计方法得到结构功能函数的前四阶矩, 假定功能函数满足某种特定分布或通过Pearson系统得到功能函数的近似概率分布函数, 以此求解结构的可靠指标和失效概率[8]。功能函数为光滑曲线, Zhao的研究表明, 只需进行5点估计或7点估计, 矩法可达到较高精度, 且精度随着估计点数的增加单调增加[9]。但这项结论仍需要作进一步的研究[15]。Fu将结构可靠性的矩法理论与有限元分析相结合, 提出了一种基于有限元分析的统计力矩法计算船桥碰撞可靠性, 用非线性隐性性能函数解决结构可靠性问题[16]。

在强震、剧烈碰撞或大爆炸下, 结构将受到严重破坏并进入强非线性, 这将导致功能函数出现折点, 本文对功能函数出现折点时矩法的计算精度与效率进行了研究, 以应用于结构弹塑性分析。

2. 矩法回顾

2.1. 功能函数矩的计算

赵衍刚[9]提出一种基于高斯-埃米尔特积分的点估计方法, 计算功能函数的矩。对于功能函数 $Z=G(\mathbf{X})$, 均值为 μ_G , 标准差为 σ_G , 三阶中心距为 α_{3G} , 四阶中心距为

α_{4G} 。对于只有一个基本随机变量 \mathbf{X} 的功能函数的中心矩可由下式计算:

$$\mu_G = \sum_{i=1}^m P_i \times G[T^{-1}(u_i)] \quad (2)$$

$$\sigma_G = \sum_{i=1}^m P_i \times \left(G[T^{-1}(u_i)] - \mu_G \right)^2 \quad (3)$$

$$\sigma_G^k \alpha_{kG} = \sum_{i=1}^m P_i \times \left(G[T^{-1}(u_i)] - \mu_G \right)^k \quad (4)$$

式中: $T^{-1}(u_i)$ 为Rosenblatt反变换, 即 $x_i = T^{-1}(u_i)$; u_i 、 P_i 分别为点估计方法的估计点和相应的权重, 按下式计算。

$$u_i = \sqrt{2}x_i, \quad P_i = \frac{\omega_i}{\pi} \quad (5)$$

式中: x_i 、 ω_i 分别为权函数 $\exp(-x^2)$ 的高斯—埃米尔特积分的高斯点和高斯系数, 可由文献[5]查得。

对于5点估计, u_i 、 P_i 分别为:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, P_0 = 8/15 \\ u_{1+} &= -u_{1-} = 1.3556262, P_1 = 0.2220759 \\ u_{2+} &= -u_{2-} = 2.8569700, P_2 = 0.0112574 \end{aligned} \quad (6)$$

2.2. 二阶矩法(SM)

得到功能函数 $Z=G(\mathbf{X})$ 前两阶中心矩后, 假设功能函数服从正态分布, 结构可靠指标 β_{SM} 和失效概率 P_{fSM} 可由下式获得:

$$\beta_{SM} = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \quad (7)$$

$$P_{fSM} = \Phi(-\beta_{SM}) \quad (8)$$

2.3. 三阶矩法(TM)

对于功能函数 $Z=G(\mathbf{X})$, 假定标准化功能函数 $Z_u = \frac{Z - \mu_G}{\sigma_G}$ 服从三参数对数正态分布[6], 结构可靠指标 β_{TM} 和失效概率 P_{fTM} 可由下式获得:

$$\beta_{TM} = \frac{-\text{Sign}(\alpha_{3G})}{\sqrt{\ln(A)}} \ln \left[\sqrt{A} \left(1 + \frac{\beta_{SM}}{u_b} \right) \right] \quad (9)$$

$$P_{fTM} = \Phi(-\beta_{TM}) \quad (10)$$

式中:

$$A = 1 + \frac{1}{u_b^2}, \quad u_b = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\alpha_{3G}} \quad (11)$$

$$a = -\frac{1}{\alpha_{3G}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_{3G}^2} \right), \quad b = \frac{1}{2\alpha_{3G}^2} (\sqrt{\alpha_{3G}^2 + 4})$$

2.4. 四阶矩法 (FM)

根据Pearson系统中不同模式的概率分布密度函数 $f(Z_u)$, 逼近功能函数的前四阶中心矩, 以此求解功能函数的失效概率。

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dZ_u} = -\frac{aZ_u + b}{c + bZ_u + dZ_u^2} \quad (12)$$

式中:

$$a = 10\alpha_{4G} - 12\alpha_{3G} - 18, \quad b = \alpha_{3G}(\alpha_{4G} + 3) \quad (13)$$

$$c = 4\alpha_{4G} - 3\alpha_{3G}^2, \quad d = 2\alpha_{4G} - 3\alpha_{3G}^2 - 6$$

结构可靠指标 β_{FM} 和失效概率 P_{fFM} 可由下式获得:

$$\beta_{FM} = -\Phi^{-1} \left[\int_{-\infty}^{-\beta_{SM}} f(z_u) dz_u \right] \quad (14)$$

$$P_{fFM} = \Phi(-\beta_{FM}) \quad (15)$$

3. 功能函数有折点情况

在结构弹塑性分析时, 为了反映结构进入塑性阶段的性能, 通常在结构易屈服处设置塑性铰单元。为了数值计算方便, 塑性铰骨架曲线通常简化为多折线形式。因此结构功能函数会出现有折点情况。

3.1. 实例1

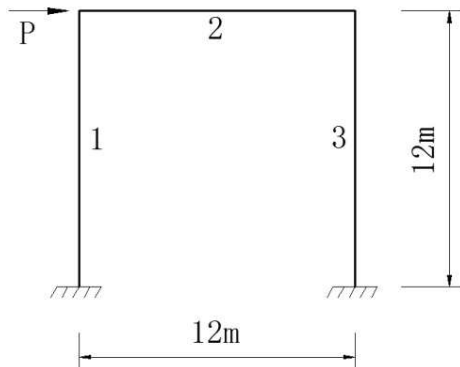


图1 刚架结构示意图。

刚架结构静力弹塑性分析, 单跨刚架基本信息如图1所示, 其中构件1截面特性 $EI_1 = 1.675 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^2$, 构件2和构件3截面特性 $EI_2 = 3.35 \times 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ 。分别在构件1、构件3与地面固结处设置塑性铰, 塑性铰骨架曲线 $M-\theta$ 采用双折线形式[11], 如图2所示。构件1屈服弯矩 $M_y = 8000 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 屈服转角 $\theta_y = 0.001 \text{ rad}$, 极限转角 $\theta_u = 0.03 \text{ rad}$ 。构件2屈服弯矩 $M_y = 10000 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 屈服转角 $\theta_y = 0.002 \text{ rad}$, 极限转角 $\theta_u = 0.06 \text{ rad}$ 。

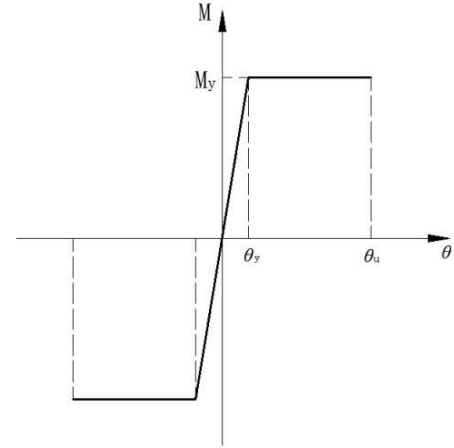


图2 塑性铰骨架曲线示意图。

假定基本随机变量为荷载 $P \sim N(3.5, 0.1)$, 构件1底部截面转角达到 0.0015 rad 时, 刚架失效。则刚架状态方程可以表示为

$$Z = G(P) = \theta_R - \theta_S \quad (16)$$

式中 θ_R 为构件1底部截面的能力, 本例中 $\theta_R = 0.0015 \text{ rad}$, θ_S 为构件1底部截面的转角反应。

计算得到 $Z = G(P)$ 函数如图3所示。由图可得随着荷载 P 的增加, 构件1底部截面首先进入塑性, 刚架发生内力从分配, 功能函数出现第一个折点, 折点坐标为 $(3.3517064, 0.0004974)$; 荷载 P 继续增加到一定值, 构件2底部截面也进入塑性, 功能函数出现第二个折点, 折点坐标为 $(3.5616692, 0.0003064)$ 。

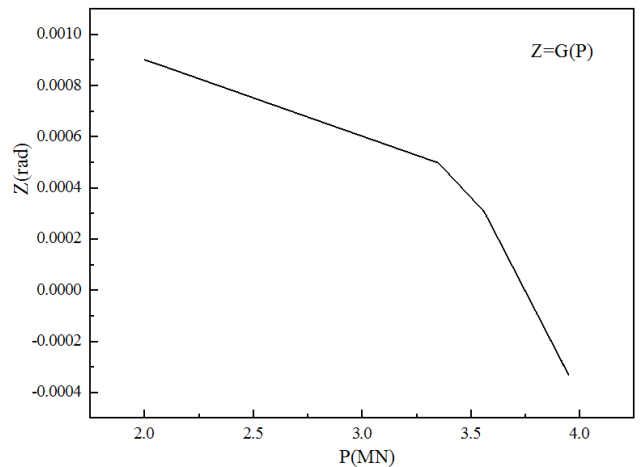


图3 刚架功能函数。

3.2. 实例2

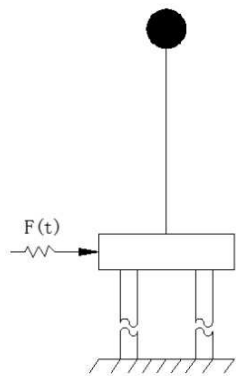


图4 桥墩船舶撞击荷载作用示意图。

在桥梁船舶撞击分析中,桥梁单墩有限元模型可简化如图4所示[12]。某桥桥墩截面特性 $EI_1=6.225\times10^7\text{N}\cdot\text{m}^2$,桩截面特性 $EI_2=1.645\times10^6\text{N}\cdot\text{m}^2$ 。分别在墩底和桩顶设置塑性铰,塑性铰骨架曲线 $M-\theta$ 采用双折线形式,如图2所示。桥墩屈服弯矩 $M_y=22687\text{kN}\cdot\text{m}$,屈服转角 $\theta_y=0.003381\text{rad}$,极限转角 $\theta_u=0.126385\text{rad}$ 。桩的屈服弯矩 $M_y=1752\text{kN}\cdot\text{m}$,屈服转角 $\theta_y=0.003767\text{rad}$,极限转角 $\theta_u=0.0321\text{rad}$ 。

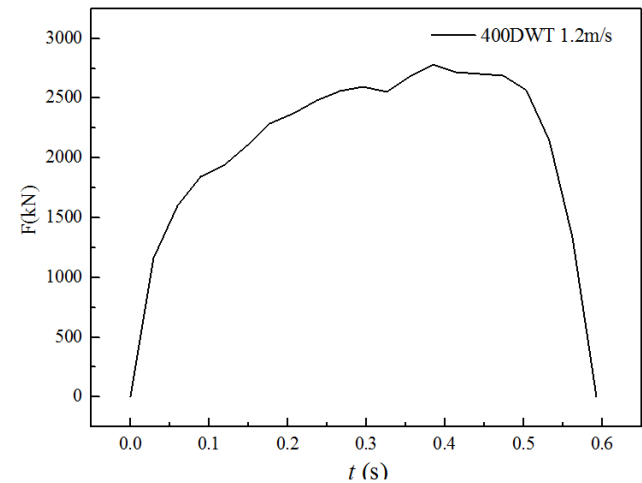


图5 撞击力时程示例。

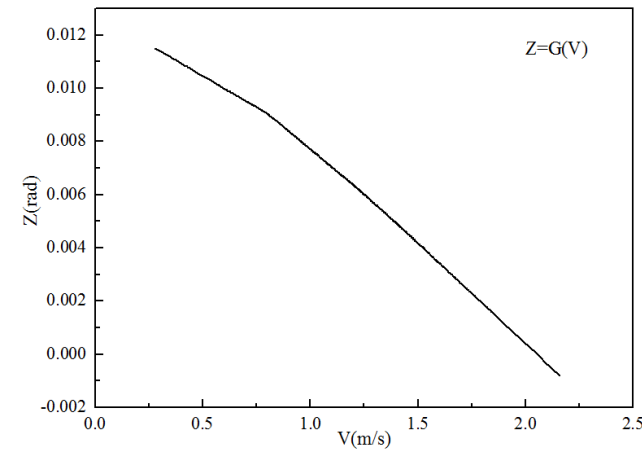


图6 桥墩船舶撞击功能函数。

假定桥墩承受400DWT船舶撞击作用,基本随机变量为撞击速度 $V\sim N(1.2,0.3)$,船舶撞击作用可以表示为图5所示撞击力时程[13]。桩顶转角达到 0.01283356rad 时,桥墩超过允许变形。则桥梁状态方程 $Z=G(V)$ 同样可以表示为式11形式,计算得到 $Z=G(V)$ 函数如图6所示。由图可得随着速度 V 的增加,桩顶截面首先进入塑性,桥墩发生内力从分配,功能函数出现折点,折点坐标为 $(0.7993586, 0.0090485)$ 。

对于功能函数有折点情况的结构弹塑性分析,如上述结构静力弹塑性分析和桥梁船舶撞击分析实例,矩法的计算精度和效率尚需进一步研究。

4. 算例和研究

计算3个有折点情况的功能函数算例,并与Monte-Carlo模拟结果比较,考察矩法的计算精度和效率。

4.1. 算例1

构造包含一个折点的双折线功能函数,假定 $x\sim N(0, 1)$ 。

$$Z = G(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & x < -1 \\ -x & x \geq 1 \end{cases} \quad (17)$$

估计点数目不同的矩法和 10^6 次Monte-Carlo模拟(MCS)求得 Z 的前四阶矩如表1所示。

表1 算例1前四阶矩比较。

	均值	标准差	偏度	峰度
3点	-0.061	0.8985	-0.4042	3.0547
5点	-0.0499	0.9206	-0.3142	2.8147
7点	-0.0403	0.9313	-0.3058	2.7116
9点	-0.0328	0.9377	-0.3093	2.6534
11点	-0.0355	0.9332	-0.3271	2.6636
13点	-0.0391	0.9286	-0.338	2.6851
15点	-0.0414	0.9259	-0.3425	2.7008
17点	-0.0428	0.9245	-0.3438	2.7112
19点	-0.0436	0.9239	-0.3433	2.7175
21点	-0.0439	0.9238	-0.342	2.7205
23点	-0.0439	0.924	-0.3403	2.7212
MCS	-0.0431	0.9268	-0.3359	2.7066

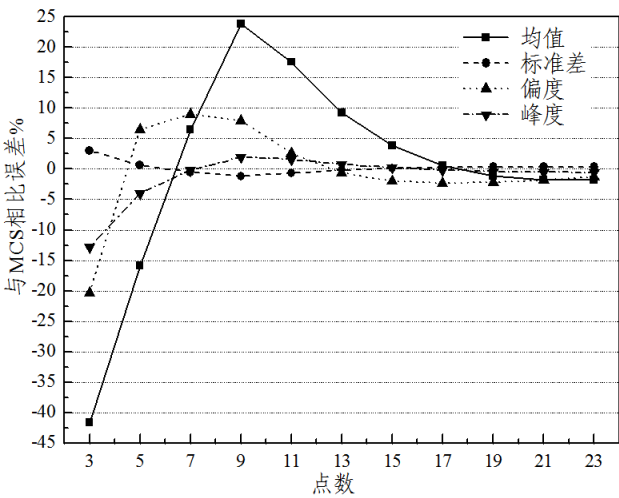


图7 算例1矩法计算前四阶矩误差。

Monte-Carlo模拟样本足够多时，可以认为是准确值，矩法计算结果与Monte-Carlo模拟结果的相对误差如图7所示。从结果可看出矩法计算功能函数前四阶矩的误差并非随估计点数目增加单调减小，而是在准确值附近震荡，当估计点数达到一定数目后，前四阶矩的误差稳定。工程应用中若要保证计算误差小于5%，则算例1中矩法计算功能函数前四阶矩需要的估计点数目为15点。

误差稳定后，取15点矩法和Monte-Carlo模拟（MCS）求得Z的功能函数失效概率如表2所示。矩法计算误差均在5%以内。Monte-Carlo模拟计算失效概率一般需要样本数 $N=100/P_f$ 。对于算例1，失效概率为0.5003，失效概率较大，Monte-Carlo模拟要得到可靠结果至少需要计算200次。矩法需要计算的次数是在误差稳定以前所有计算次数相加，前15次相加为63次，计算次数为Monte-Carlo模拟计算次数的1/3。

表2 算例1失效概率比较。

	SM	TM	FM	MCS
失效概率	0.518934	0.49659	0.491692	0.5003
相对误差%	3.72	0.74	1.72	—

4.2. 算例2

构造包含两个折点的功能函数，假定 $x \sim N(0,1)$ 。

$$Z = G(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4} & x < 0 \\ -x + 3 & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3} & x \geq 1 \end{cases} \quad (18)$$

估计点数目不同的矩法和 10^7 次Monte-Carlo模拟（MCS）求得Z的前四阶矩如表3所示。

表3 算例2前四阶矩比较。

	均值	标准差	偏度	峰度
3点	-0.061	0.8985	-0.4042	3.0547
5点	2.94174	1.01785	-0.3768	3.27877
7点	2.95297	1.01692	-0.397	3.33346
9点	2.9617	1.01682	-0.4182	3.35748
11点	2.95855	1.01787	-0.4299	3.34262
13点	2.95433	1.01845	-0.4319	3.32632
15点	2.95164	1.01872	-0.4304	3.3165
17点	2.95002	1.01881	-0.4281	3.31112
19点	2.94915	1.0188	-0.4257	3.30865
21点	2.9488	1.01874	-0.4237	3.30807
23点	2.94882	1.01866	-0.4223	3.3087
MCS	2.95119	1.01852	-0.4229	3.31723

Monte-Carlo模拟样本足够多时，可以认为是准确值，矩法计算结果与Monte-Carlo模拟结果的相对误差如图8所示。图8可以得到与算例1相同的结论，工程应用中若要保证计算误差小于5%，则算例2中矩法计算功能函数前四阶矩需要的估计点数目为9点。

误差稳定后，取9点矩法和Monte-Carlo模拟（MCS）求得Z的功能函数失效概率如表4所示。三阶矩法（TM）与四阶矩法（FM）计算误差均在5%以内。对于此算例，失效概率为0.006208，Monte-Carlo模拟要得到可靠结果至少

需要计算 1.6×10^4 次。矩法需要计算的次数是在误差稳定以前所有计算次数相加，前9次相加为24次，仅为Monte-Carlo模拟计算次数的1/667。

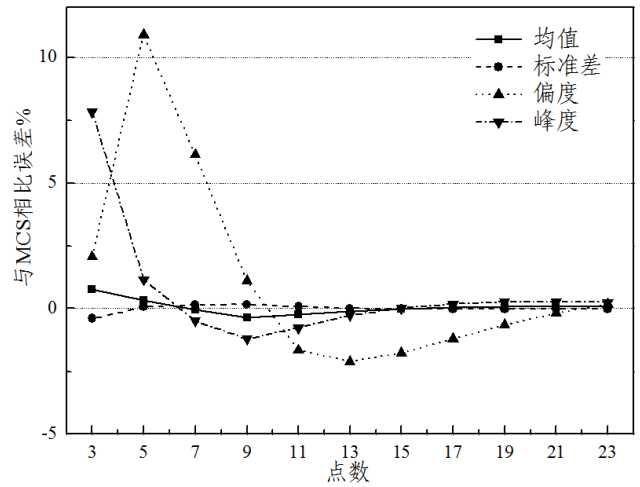


图8 算例2矩法计算前四阶矩误差。

表4 算例2失效概率比较。

	SM	TM	FM	MCS
失效概率	0.0018971	0.0060019	0.0059716	0.006208
相对误差%	-69.44	-3.32	-3.81	—

4.3. 算例3

计算前文中的实例2的桥梁船舶撞击分析，速度 $V \sim N(1.2, 0.3)$ 。

估计点数目不同的矩法和 10^6 次Monte-Carlo模拟（MCS）求得Z的前四阶矩如表5所示。

表5 算例3前四阶矩比较。

	均值	标准差	偏度	峰度
3点	0.0061	0.00209	-0.1426	3.00678
5点	0.00613	0.00213	-0.1127	2.75254
7点	0.00612	0.00212	-0.1523	2.73372
9点	0.00612	0.0021	-0.166	2.75225
11点	0.00611	0.0021	-0.1675	2.76768
13点	0.00611	0.0021	-0.1647	2.7756
15点	0.00611	0.0021	-0.1607	2.77722
17点	0.00612	0.00211	-0.1566	2.77441
19点	0.00612	0.00211	-0.1566	2.77441
21点	0.00612	0.00211	-0.1501	2.76121
23点	0.00612	0.00211	-0.1521	2.75889
MCS	0.00612	0.00211	-0.1573	2.76634

Monte-Carlo模拟样本足够多时，可以认为是准确值，矩法计算结果与Monte-Carlo模拟结果的相对误差如图9所示。图9可以得到与算例1类似的结论，工程应用中若要保证计算误差小于5%，则算例3中矩法计算功能函数前四阶矩需要的估计点数目为13点。

误差稳定后，取13点矩法和Monte-Carlo模拟（MCS）求得Z的功能函数失效概率如表6所示。四阶矩法计算误差在10%以内。对于此算例，失效概率为0.0021，Monte-Carlo模拟要得到可靠结果至少需要计算 4.8×10^4 次。矩法需要计算的次数是在误差稳定以前所有计算次

数相加, 前13次相加为48次, 仅为Monte-Carlo模拟计算次数的1/1000。

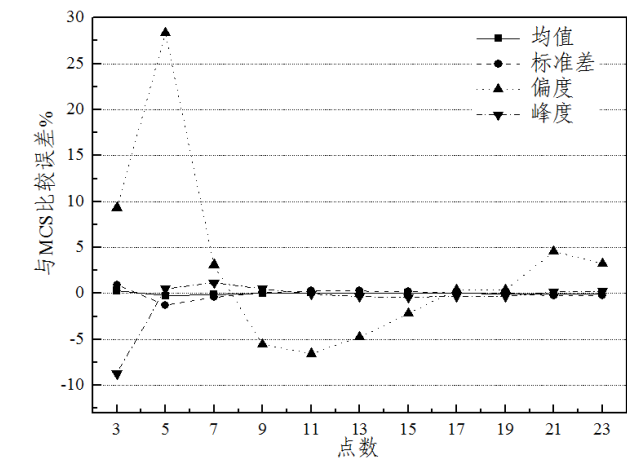


图9 算例3矩法计算前四阶矩误差。

表6 算例3失效概率比较。

	SM	TM	FM	MCS
失效概率	0.00183259	0.00313487	0.00189153	0.0021
相对误差%	-12.73	49.28	9.93	—

结构功能函数 $Z=f(X)$ 包含显式功能函数和隐式功能函数两种情况。在使用矩法或Monte-Carlo模拟生成自变量 X 的样本后, 主要计算过程为通过求解 $Z=f(X)$ 得到功能函数的值。对于显式功能函数可以直接通过一般代数计算求解, 对于隐式功能函数一般需要通过间接方法求解, 如有限元计算。

在实际工程中, 多数情况下功能函数不能用显示函数表示, 如实例2功能函数 $Z=G(V)$, 此类功能函数中结构反应部分需要通过有限元计算得到。对于体系复杂的结构、结构需要进行弹塑性分析时, 有限元计算将耗时较长。与Monte-Carlo模拟需要大量有限元计算相比, 矩法理论中的点估计方法减少了有限元计算的次数, 从而减少了有限元计算的时间。矩法理论需要采用点估计方法计算结构功能函数的前几阶矩, 其估计点个数即为需要有限元计算的次数。

上述各算例矩法在计算前几阶矩时, 不同精度要求下, 所需计算次数如表7所示。文献[1]指出, 根据经验, 失效概率为 P_f , Monte-Carlo模拟计算量至少为 $100/P_f$ 次, 则各算例采用Monte-Carlo模拟至少需要计算次数如表8所示。

表7 不同精度下矩法需要计算次数。

误差	算例1	算例2	算例3
2%	120	63	80
5%	80	24	48
10%	48	15	15

表8 各算例Monte-Carlo模拟需要计算次数。

	算例1	算例2	算例3
失效概率	0.5003	0.006208	0.0021
计算次数	200	1.6×10^4	4.8×10^4

功能函数为光滑曲线, Zhao[9]的研究表明, 只需进行5点估计或7点估计, 矩法可达到较高精度, 即只需做5次或7次计算即可。表7表明功能函数有折点时, 要达到一定精度, 需要的计算次数有一定增加, 但仍然少于Monte-Carlo模拟法所需的计算次数。

5. 结论

本文通过实例, 说明在进行结构弹塑性分析阶段的可靠度分析时, 由于为了数值计算方便, 塑性铰骨架曲线通常简化为多折线形式, 结构的状态功能函数会出现折点情况。通过实际算例讨论了功能函数有折点情况下矩法应用的精度和效率, 得到如下结论:

- (1) 功能函数有折点情况下, 矩法精度并非随估计点数增加而单调增加, 当估计点个数足够多时, 一般为15~23个, 矩法计算结果基本稳定, 且有较好的精度;
- (2) 在功能函数前四阶矩的精度达到一般工程精度要求的5%时, 功能函数有折点情况时的矩法计算量比功能函数光滑情况时的矩法计算量多, 对于本文的3个算例, 前者是后者的7~11倍;
- (3) 在功能函数前四阶矩的精度达到一般工程精度要求的5%时, 对于本文的3个算例, Monte-Carlo模拟计算量是矩法计算量的2~1000倍, 且失效概率越小, Monte-Carlo模拟法的计算量越大, 矩法相对于Monte-Carlo模拟的计算效率越高。

参考文献

[1] Hasofer, A. M., and Lind, N. C. 'Exact and invariant second moment code format. J. Engrg. Mech. Div., ASCE, 100 (1): 111-121. 1974.

[2] Rackwitz, R. Practical probabilistic approach to design. First order reliability concepts for design codes, Bull. d'Information, No. 112, Comite European du Beton, Munich, Germany. 1976.

[3] Breitung, K. Asymptotic approximation for multinormal integrals. J. Engrg. Mech., ASCE, 110 (3), 357-366. 1984.

[4] Der Kiureghian, A., Lin, H. Z., and Hwang, S. J. Second-order reliability approximations. J. Engrg. Mech., ASCE, 113 (8), 1208-1225. 1987.

[5] Cai, G. Q., and Elishakoff, I. Refined second-order reliability analysis. Struct. Safety, 14 (3), 267-276. 1994.

[6] 赵国藩, 金伟良, 贡金鑫. 结构可靠度理论[M]. 中国建筑工业出版社, 2000。

[7] 张明. 结构可靠度理论-方法与程序[M]. 科学出版社, 2009。

[8] Zhao YG, Ono T. Moment methods for structural reliability. Structural Safety 2001; 23 (1): 47-75.

[9] Zhao YG, Ono T. New point-estimates for probability moments. J Engrg, Mech, ASCE 2000; 126 (4): 433-6.

- [10] Tichy, M. First-order third-moment reliability method. *Structural Safety*. Vol. 16, 189-200, 1994.
- [11] SCHOPRA A K. *Dynamics of Structures* [M]. 2nd Edition, 影印版. 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [12] 孟德巍. 船撞桥的简化动力分析[D]. 上海: 同济大学土木工程学院, 2010.
- [13] 卜令涛. 船舶对桥梁冲击作用的简化概率方法[D]. 上海: 同济大学土木工程学院, 2011.
- [14] Zhao, Y. and Ono, T. On the problems of the fourth moment method, *Struct. Safety* 26 (4): 343–347, 2004.
- [15] Sang Hoon Lee, Byung Man Kwak. Response surface augmented moment method for efficient reliability analysis, *Structural Safety*, 28: 261-272, 2006.
- [16] Fu T, Liu Y, Zhu Z. Research on Bridge Structure Reliability Evaluation due to Vessels Collision Based on a Statistical Moment Method [J]. Hindawi Limited, 2021.